Άσκηση: Να βρεθούν τα πολυώνυμα Taylor τάξης 3 και τάξης 4 των παρακάτω συναρτήσεων γύρω από το σημείο $x_0=0$.

α) $f(x)=e^{3x}$

β) $f(x)=\cos(2x)$

γ) $f(x)=\sin(4x)$

Απόδειξη:

α)
$$\begin{array}{ll} f(x)=e^{3x} & f(0)=1 \\ f'(x)=3e^{3x} & f'(0)=3 \\ f''(x)=9e^{3x} & f''(0)=9 \\ f'''(x)=27e^{3x} & f'''(0)=27 \\ f^{(4)}(x)=81e^{3x} & f^{(4)}(0)=81 \end{array}$$

$$T_{3,f,0}(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3=1+3x+\frac{9}{2}x^2+\frac{9}{2}x^3$$

$$T_{4,f,0}(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4=1+3x+\frac{9}{2}x^2+\frac{9}{2}x^3+\frac{27}{8}x^4$$

β)
$$\begin{array}{ll} f(x)=\cos(2x) & f(0)=1 \\ f'(x)=-2\sin(2x) & f'(0)=0 \\ f''(x)=-4\cos(2x) & f''(0)=-4 \\ f'''(x)=8\sin(2x) & f'''(0)=0 \\ f^{(4)}(x)=16\cos(2x) & f^{(4)}(0)=16 \end{array}$$

$$T_{3,f,0}(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3=1-2x^2$$

$$T_{4,f,0}(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4=1-2x^2+\frac{2}{3}x^4.$$

γ)
$$\begin{array}{ll} f(x)=\sin(4x) & f(0)=0 \\ f'(x)=4\cos(4x) & f'(0)=4 \\ f''(x)=-16\sin(4x) & f''(0)=0 \\ f'''(x)=-64\cos(4x) & f'''(0)=-64 \\ f^{(4)}(x)=256\sin(4x) & f^{(4)}(0)=0 \end{array}$$

$$T_{3,f,0}(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 = 4x - \frac{32}{3}x^3$$

$$T_{4,f,0}(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 = 4x - \frac{32}{3}x^3.$$

Είχαμε αποδείξει, στο προηγούμενο κεφάλαιο, το θεώρημα:

Αν $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ $x_0\in[\alpha,\beta]$ ώστε f:

$n-1$ φορές παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ και

n φορές παραγωγίσιμη στο x_0.

Τότε, το πολυώνυμο Taylor τάξης n στο x_0 (δηλαδή $T_{n,f,x_0}(x)$)

είναι το μοναδικό πολυώνυμο $T(x)$ βαθμού $\leq n$ για το οποίο ισχύει:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-T(x)}{(x-x_0)^n} = 0 \quad (*).$$

Αν βρούμε ένα πολυώνυμο $T(x)$ βαθμού $\leq n$ για το οποίο ισχύει η $(*)$, τότε το $T(x) = T_{n,f,x_0}(x)$.

<u>Εφαρμογή:</u> Έστω $f(x) = \frac{1}{1-x}$.

Η f είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη (στο πεδίο ορισμού της).

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots, \text{ για } |x|<1$$

Θα δείξουμε, χρησιμοποιώντας το προηγούμενο θεώρημα, ότι:

$T_{n,f,x_0}(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n$.

Θέτουμε, $T_n(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n$.

$$f(x) - T_n(x) = \frac{1}{1-x} - \left(1 \cdot \frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right) = \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

Έτσι, $\frac{f(x)-T_n(x)}{x^n} = \frac{x}{1-x}$

και άρα $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-T_n(x)}{x^n} = 0$.

Θεώρημα: (Taylor)

Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνάρτηση $n+1$ φορές παραγωγίσιμη στο $[a,b]$ και $x_0\in[a,b]$. Τότε, για κάθε $x\in[a,b]$ το υπόλοιπο Taylor $R_{n,f,x_0}(x) = f(x) - T_{n,f,x_0}(x)$ παίρνει τη μορφή:

α) (Μορφή Cauchy του υπολοίπου Taylor): Υπάρχει ξ στο διάστημα με άκρα τα x_0, x, ώστε $R_{n,f,x_0}(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n(x-x_0)$

β) (Μορφή Lagrange του υπολοίπου Taylor): Υπάρχει ξ στο διάστημα με άκρα τα x_0,x, ώστε $R_{n,f,x_0}(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$

γ) (Ολοκληρωτική μορφή του υπολοίπου Taylor): Αν η $f^{(n+1)}$ είναι ολοκληρώσιμη, τότε $R_{n,f,x_0}(x) = \dfrac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt$.

Απόδειξη: Σταθεροποιούμε $x\in[a,b]$ και θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi:[a,b]\to\mathbb{R}$ με $\varphi(t) = R_{n,f,t}(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n}\dfrac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k =$

$$= f(x) - \left(f(t) + \frac{f'(t)}{1!}(x-t) + \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n\right)$$

Παραγωγίζοντας έχουμε:

τηλεσκοπικό άθροισμα

$$\varphi'(t) = 0 - f'(t) - \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k - \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1}\right) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n$$

Επίσης, $\varphi(x_0) = R_{n,f,x_0}(x)$

$\varphi(x) = R_{n,f,x}(x) = 0$

α) Μορφή Cauchy: Από το Θ.Μ.Τ. του Δ.Λ. υπάρχει ξ στο διάστημα με άκρα τα x_0,x ώστε: $\underbrace{\varphi(x_0)}_{R_{n,f,x_0}(x)} - \underbrace{\varphi(x)}_{0} = \varphi'(\xi)(x_0-x)$

Έτσι, $R_{n,f,x_0}(x) = \varphi(x_0) - \varphi(x) = \varphi'(\xi)(x_0-x) = \left(-\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n\right)(x_0-x)$.

β) Εφαρμόζουμε το Γενικευμένο Θεώρημα Μέσης Τιμής του Cauchy για τις συναρτήσεις $\varphi(t)$ και $g(t) = (x-t)^{n+1}$ στο διάστημα με άκρα τα x_0,x. Υπάρχει ξ στο διάστημα με άκρα τα x_0,x.

$$\frac{\varphi(x_0)-\varphi(x)}{g(x_0)-g(x)} = \frac{\varphi'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{-\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n}{(n+1)(x-\xi)^n(-1)} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

Όμως, $\dfrac{\varphi(x_0)-\varphi(x)}{g(x_0)-g(x)} = \dfrac{R_{n,f,x_0}(x) - 0}{(x-x_0)^{n+1} - 0}$

Άρα, $R_{n,f,x_0}(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$

γ) Η φ' είναι ολοκληρώσιμη (εφόσον η f είναι ολοκληρώσιμη).

Έτσι, $R_{n,f,x_0}(x) = \varphi(x_0) - \varphi(x) = \int_x^{x_0} \varphi'(t)\,dt = \int_x^{x_0} \left(-\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\right) dt =$
$= \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\,dt.$

Ανάπτυξη γνωστών συναρτήσεων σε δυναμοσειρές (Σειρές Taylor)

α) $f(x) = e^x$

Όπως έχουμε δει $T_{n,f,0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$

Θέλουμε ν.δ.ο. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$.

Δηλαδή, ότι $e^x = \lim_{n\to\infty} T_{n,f,0}(x)$

→ Για $x=0$, προφανές $(1=1)$.

→ Για $x \neq 0$,

Από τη μορφή Lagrange του υπολοίπου Taylor υπάρχει ξ στο διάστημα με άκρα τα $0, x$ ώστε $R_{n,f,0}(x) = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!} x^{n+1}$

→ Αν $x>0$ έχουμε $0<\xi<x$ άρα $e^{\xi} < e^x$

$$|R_{n,f,0}(x)| \leq e^x \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

→ Αν $x<0$ έχουμε $x<\xi<0$ άρα $e^{\xi}<1$

$$|R_{n,f,0}(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Με κριτήριο λόγου βλέπουμε ότι για την ακολουθία $a_n = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$ έχουμε $\lim a_n = 0$

$$\left[\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{|x|^{n+2}}{(n+2)!}}{\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}} = \frac{|x|}{n+2} \to 0 < 1 \right]$$

Συνεπώς, $R_{n,f,0}(x) \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Επομένως, $e^x = \lim_{n\to\infty} T_{n,f,0}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

6 $f(x) = \cos x$

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos x \\ f'(x) &= -\sin x \\ f''(x) &= -\cos x \\ f'''(x) &= \sin x \\ f^{(4)}(x) &= \cos x \end{aligned} \quad \left\{ \begin{aligned} f^{(4n)}(x) &= \cos x \\ f^{(4n+1)}(x) &= -\sin x \\ f^{(4n+2)}(x) &= -\cos x \\ f^{(4n+3)}(x) &= \sin x \end{aligned} \right.$$

$$T_{2n,f,0}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \dots + \frac{(-1)^n (x)^{2n}}{(2n)!}$$

Έστω $x \neq 0$.

Από τη μορφή Lagrange του υπολοίπου Taylor, υπάρχει ξ στο διάστημα με άκρα τα $0, x$, ώστε: $R_{2n,f,0}(x) = \dfrac{f^{(2n+1)}(\xi)}{(2n+1)!} x^{2n+1}$

Παρατηρούμε, ότι $|f^{(2n+1)}(\xi)| \leq 1$, άρα $|R_{2n,f,0}(x)| \leq \dfrac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}$

Εύκολα βλέπουμε, όπως πριν με το κριτήριο λόγου πως $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} = 0$. Συνεπώς, $\cos x = \lim\limits_{n\to\infty} T_{2n,f,0}(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$ $\forall x \in \mathbb{R}$

8 $f(x) = \sin x$

$$T_{2n+1,f,0}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots + \frac{(-1)^n (x^{2n+1})}{(2n+1)!}$$

Έστω $x \neq 0$.

Από τη μορφή Lagrange του υπολοίπου Taylor, υπάρχει ξ στο διάστημα με άκρα τα $0, x$ ώστε: $R_{2n+1,f,0}(x) = \dfrac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} x^{2n+2}$

Παρατηρούμε ότι $|f^{(2n+2)}(\xi)| \leq 1$. Άρα, $|R_{2n+1,f,0}(x)| \leq \dfrac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}$

Εύκολα βλέπουμε πως $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} = 0$.

Συνεπώς, $\sin x = \lim\limits_{n\to\infty} T_{2n+1,f,0}(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ $\forall x \in \mathbb{R}$.